Title	行列系ノ既約性ト絶對規約性
Author(s)	安倍, 亮
Citation	全国紙上数学談話会. 217 p.245-p.264
Issue Date	1941-06-13
oaire:version	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74860
rights	
Note	

930. 行列系ノ既約性ト絶對既約性

安倍　　亮（東大）

1. Pヲ一ツノ Körper，Kヲソノ有限次ノ拡大体トスル．群 $\mathfrak{G}$ ノ K ニ於ケル g 次ノ Matrix ニヨル表現

$$\mathfrak{G} \ni a \longrightarrow \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \cdots\cdots & \alpha_{1g} \\ & \cdots\cdots & \\ \alpha_{g1} & \cdots\cdots & \alpha_{gg} \end{pmatrix} \qquad \alpha_{ik} \in K \tag{1}$$

ガ與ヘラレテ居ルトスル。Matrix ノ一ツ一ツノ元 α_{ik} ヲ，K ノ P ニ於ケル正規表現ニ於テソレニ對應スル Matrix A_{ik}（$(K:P)=n$ ナラ n 次ノ行列）デ置換ヘレバ

$$a \longrightarrow \begin{pmatrix} A_{11} & \cdots\cdots & A_{1g} \\ & \cdots\cdots & \\ A_{g1} & \cdots\cdots & A_{gg} \end{pmatrix} \tag{2}$$

ガ $\mathfrak{G}$ ノ P ニ於ケル ng 次ノ表現ニナルコトハ明カデアル。Darstellungsmodul ニツイテ云ヘバ次ノ様ニ云ヒ表ハサレル；

(1) ノ表現ガ $\mathfrak{G}$－K－Modul

$$\mathfrak{M} = u_1 K + \cdots\cdots + u_g K \tag{3}$$

デ vermitteln サレル．即チ

$$\mathfrak{G} \ni a \qquad a(u_1, \cdots\cdots, u_g) = (u_1, \cdots\cdots, u_g) \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \cdots\cdots & \alpha_{1g} \\ & \cdots\cdots & \\ \alpha_{g1} & \cdots\cdots & \alpha_{gg} \end{pmatrix} \tag{3'}$$

デアルトスル。

$$K = x_1 P + \cdots\cdots + x_n P \tag{4}$$

ナラバ $\mathfrak{M}$ ハ P-*Modul* トシテ

$$\mathfrak{M} = u_1 x_1 P + u_1 x_2 P + \cdots\cdots + u_g x_n P$$

ナル ng 階ノ *Modul* ニナル。此ノ様ニ $\mathfrak{G}$-P-*Modul* ト考ヘタ $\mathfrak{M}$ ガ *vermitteln* スル $\mathfrak{G}$ ノ P ニ於ケル ng 次ノ表現ガ(2)ニ他ナラナイ。

扨表現(1)ガ既約ダトスル。サウスルト大抵ノ場合ハ表現(2)モ既約ニナル。唯(1)ガ K ニオケル表現デアッテモ，適當ニ同値ナ表現ニ移ルト，$P \subset \Omega \subsetneq K$ ナル中間体 Ω ニ於ケル表現ニナッテシマフ，即チ α_{ik} ハ既ニ $\Omega \subsetneq K$ ニ含マレテ了フ様ナバアヒニハサウハナラナイ。

$$K = x_1 \Omega + \cdots\cdots + x_r \Omega, \qquad \Omega = \omega_1 P + \cdots\cdots + \omega_s P$$

トスレバ，K ノ P-*Basis* トシテ特別ナ

$$K = \underbrace{x_1\omega_1 P + \cdots\cdots + x_1\omega_s P}_{} + \cdots\cdots + \underbrace{x_r\omega_1 P + \cdots\cdots + x_r\omega_s P}_{}$$

ヲトレバ，Ω ノ元ヲカケルト $\underbrace{\qquad}$ デマトメタ各部分ハ夫々ノ中ヘウツル。故ニ K ノ P ニ於ケル正規表現ニ於テ，特ニ $\alpha_{ik} \in \Omega$ ニ對應スル *Matrix* A_{ik} ハ全部

$$A_{ik} = \begin{bmatrix} A'_{ik} & & & \\ & A'_{ik} & & \\ & & \ddots & \\ & & & A'_{ik} \end{bmatrix} \; \Big\} \, r\text{ケ} \qquad (A'_{ik} \text{ハ} s \text{次ノ行列})$$

ノ形ニナル，從ッテ(2)ノ右辺ノ *Matrix* モ行列ヲ適當ニイレカヘテ，同値ナモノニ移ルト

$$A' = \begin{bmatrix} A'_{11} & \cdots\cdots & A'_{1g} \\ & \cdots\cdots & \\ A'_{g1} & \cdots\cdots & A'_{gg} \end{bmatrix}$$

ヲ V ケ *diagonal* ニ並ベタ形ニナリ，表現(2)ハ可約ニナッテ了フ。

(1)ガ如何ナル同値表現ニ移ッテモ，中間体 Ω ニ於ケル表現ニナラナイナラバ，(2)モ既約デアルコトガ証明サレル。然シ決シテ絶對既約ニハナラナイ。

上ノ附帯條件ヲ *Darstellungsmodul* ニツイテ云ヒ表ハセバ次ノヤウニナル：若シ(3)ノ *Basis* $u_1, \cdots\cdots, u_g$ ヲ適當ニトッタトキ，表現(1)ガ中間体 Ω ニオケル表現ニナルナラバ

$$\mathfrak{m} = u_1\Omega + \cdots\cdots + u_g\Omega$$

ガ $\mathfrak{o}$-Ω-*Modul* ニナル。ソシテ $\mathfrak{M}$ ハ單ニ $\mathfrak{o}$-Ω-*Modul* $\mathfrak{m}$ ニ於テ基礎体 Ω ヲ K マデ拡大シタ。

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{m}_K$$

ニ過ギナイ．即チ條件ハ：$\mathfrak{M}$ ハ $P < \Omega \neq K$ ナルイカナル中間体 Ω ニ於ケル $\mathfrak{o}$-Ω-*Modul* $\mathfrak{m}$ ノ擴大 $\mathfrak{m}_K$ ニモナッテヰナイ。

逆ニ P ニ於テ既約デハアルガ絶對既約デナイ表現 $\mathfrak{D}$ ガアルトキ，P ノ適當ナ拡大体 K ニ於ケル適當ナ絶對既約表現(1)ガアッテ，(1)カラ上ニ述ベタ手續デ(2)ヲ作ルト $\mathfrak{D}$ ハ之ニ同値ニナルコトガ証明デキル。カクシテ既約表現ハイツデモ絶對既約表現ニ帰着サセルコトガデキル。

Darstellungsmodul トシテ云ヘバ：$\mathfrak{A}$ ヲ vermitteln スル既約ナ $\mathfrak{g}$-P-Modul ヲ $\mathfrak{M}_1$ トスル，之ハアル絶對既約ナ $\mathfrak{g}$-K-Modul $\mathfrak{M}_2$ ＝ $\mathfrak{g}$-P-Modul トシテ同型デアル．之ガ本談話ノ主ナ目的デアル。

似タ様ナ定理ガ Modul デナク，Lie algebra 其他ヲ含ム一般ノ lineare Algebra デ成立ツコトガ知ラレテ居ル．（Landherr, Jacobson 等）ソレモ上ノ定理ノ一ツノ應用トシテ証明デキル。

何レモ皆極メテ elementary ナ事實許リデアル。

2. 吾々ハ群ノ他ニ環ノ Lie 環等ノ表現モ考ヘルカラ，「表現サレルモノ」ノ集合 $\mathfrak{r}$ ハ單ニ集合トシテオイタ方ガ都合ガヨイ。$\mathfrak{r}$ ノ元相互ノ間ノ算法ハ吾々ノ現在ノ考察ノ範囲デハ全然問題ニナラナイ。コノ場合ニ $\mathfrak{r}$ ノ Darstellungsmodul ノ定義ヲ述ベレバ（Darstellung ト云ッテモ，單ニ $\mathfrak{r}$ ノ元 S ニ Matrix ガ對應サレテ居ルダケデアル）：

定義．$\mathfrak{r}$ ハ一ツノ集合，K ハ單位元ヲ持ツ（必ズシモ可換デナイ）Ring トスル．$\mathfrak{M}$ ハ有限階ノ K-Modul．

$$\mathfrak{M} = u_1 K + \cdots\cdots + u_g K \quad \left(\begin{array}{ll} u(\lambda+\mu) = u\lambda + u\mu & u, v \in \mathfrak{M} \\ (u\lambda + v\mu)\nu = u\cdot\lambda\nu + v\cdot\mu\nu & \\ & \lambda,\mu,\nu\in K \end{array}\right)$$

デ，K ノ單位元 1 ハ單位演算子：

$$u\cdot 1 = u, \quad u \in \mathfrak{M}.$$

$u_1, \cdots\cdots, u_g$ ハ K ニ関シ一次独立デアルトスル．（即チ $\mathfrak{M}$

ハKノ上ノLinearformenmodul）従ッテ特ニ$\mathfrak{M}\kappa=0$カラハ$\kappa=0$ガ出ル。*) 更ニ$S\in\mathfrak{r}$, $u\in\mathfrak{M}$ニ對シ

$Sm\in\mathfrak{M}$

$$S(u\lambda+v\mu)=Su\cdot\lambda+Sv\cdot\mu$$

$$u,v\in\mathfrak{M},\ \lambda,\mu\in K$$

此時$\mathfrak{M}$ヲ$\mathfrak{r}$ノKニ於ケルDarstellungsmodul，或ハ簡單ニ$\mathfrak{r}$-K-Modulト云フ。

$\mathfrak{M}$ガ(0)ト$\mathfrak{M}$自身以外ニ$\mathfrak{r}$-K-Teilmodulヲ持タナイトキ，$\mathfrak{M}$ハ既約ナ$\mathfrak{r}$-K-Modulデアルト云フ。但シ總テノ$S\in\mathfrak{r}$ニ對シテ$S\mathfrak{M}=0$ナル場合，即チ既約ナ零表現ヲvermittelnスル場合ニハ，$\mathfrak{M}$ハ既約ト云ハナイコトニスル。即チ今後既約トハ，(0)ト$\mathfrak{M}$以外ニ$\mathfrak{r}$-K-Teilmodulヲ含マズ，且ツ$\mathfrak{r}\mathfrak{M}\neq0$ナル事トスル。

$K\subset\Omega$ナルトキ，$\mathfrak{r}$-Ω-Modul $\mathfrak{M}_\Omega$ノ定義ハ明カデアラウ。Kガ可換体デ，Kノ任意ノ代數的擴大体Ωニ對シ$\mathfrak{M}_\Omega$ガ既約ナルトキ，$\mathfrak{M}$ハ絶對既約ナ$\mathfrak{r}$-K-Modulデアルト云フ。

$\mathfrak{r}$ノ元aニ對シ，第一節ノ(3')ノ式ニヨッテKノ元デ作ッタg次ノMatrixガ對應スル．コノ對應ガ，$\mathfrak{M}$ノvermittelnスル$\mathfrak{r}$ノ「表現」デアル。

表現ト云ヘルタメニハ通常

---

*) 換言スレバ，Kノ二ツノ元ガ相異ナッテ居レバ，$\mathfrak{M}$ニ對スルOperatorトシテモ本當ニ違ッテ居ル。

(1) $\mathfrak{r}$ガ半群ナラ，$S_1S_2 \cdot u = S_1 \cdot S_2 u$ ナル條件ガ

(2) $\mathfrak{r}$ガ加群ナラ，$(S_1+S_2)u = S_1u + S_2u$ ナル條件ガ

(3) $\mathfrak{r}$ガKノ$\mathfrak{Z}$entrum ニ含マレル Ring Pノ上ノ linear set ナラ

$$(S_1\rho_1 + S_2\rho_2)u = S_1u\cdot\rho_1 + S_2u\cdot\rho_2$$

ナル條件ガ

(4) $\mathfrak{r}$ガ Lie 環ナラバ $(S_1 \circ S_2)u = S_1\cdot S_2u - S_2\cdot S_1u$ ナル條件ガ

夫々附加ヘラレナケレバナラナイ。

3. $\boxed{\text{定理 I}}$ Kハ Schiefkörper，$\mathfrak{M}$ハ既約ナ$\mathfrak{r}$-K-Modul，PハKノ Zentrum ニ含マレ(K:P)＝有限ナ様ナKノ Teilkörper トスル。而モ $P \subset \Omega \subsetneqq K$ ナル如何ナル中間体Ωニ對シテモ，$\mathfrak{M}$ハ$\mathfrak{r}$-Ω-Modul $\mathfrak{m}$ノ拡張ニナッテ居ナイトスル。コノトキ$\mathfrak{M}$ハ$\mathfrak{r}$-P-Modul トシテモ既約デアル。

証明．$\mathfrak{M}$ガ$\mathfrak{r}$-P-Modul トシテ既約ナ Teilmodul $\mathfrak{m}$ ($\neq 0, \neq \mathfrak{M}$) ヲ含ムトスル．$\mathfrak{m}$ハPノ元ハ Operator トシテ許スガ，Kノ元ハ全部ハ許サナイ．$\because$ $\mathfrak{m}K$ハ$\mathfrak{r}$-K-Teilmodul トナリ，從ッテ$\mathfrak{M}$ノ既約性ニヨッテ$\mathfrak{M}$ト一致シナケレバナラナイカラデアル．其処デ$\mathfrak{m}$ノ Operator トシテ許スKノ元ノ全体ハ $P \subset \Omega \subsetneqq K$ ナル中間体Ωヲナス．$\mathfrak{m}$ハ既約ナ$\mathfrak{r}$-Ω-Modul デアル．

扨Kノ Ω-Basisヲ

$$K = \Omega x_1 + \cdots\cdots + \Omega x_r$$

トスルト，既ニ述ベタ様ニ $\mathfrak{M} = mK$ ダカラ

$$\mathfrak{M} = (m x_1, \cdots\cdots, m x_r) \qquad (1)$$

デアル. 右辺ハ $m x_1, \cdots\cdots, m x_r$ ノ erzeugen スル Modul ト云フ意味デアル。$x_i^{-1}\Omega x_i = \Omega_i$ ト書ケバ，$m x_i$ ハ $\mathfrak{r}$-Ω_i-Modul デアッテ，$\mathfrak{r}$-P-Modul トシテハ m ヲ $u \longleftrightarrow u x_i \in m x_i$ ナル對應ニヨッテ isomorph ダカラ，矢張リ既約デアル。従ッテモシ或 $i \neq j$ ニ對シテ $m x_i \wedge m x_j \neq (0)$ ナラバ，$m x_i = m x_j$ デアル. 故ニ

$$m x = m, \quad x = x_i x_j^{-1} \notin \Omega$$

即チ m ハ Ω ニ屬シナイ元 x ヲ operator トシテ許スコトニナリ，Ω ノ作リ方ニ反スル。∴ 必ズ $m x_i \wedge m x_j = (0)$ デ

$$\mathfrak{M} = m x_1 + \cdots\cdots + m x_r$$

ハ直和ニナル。所ガ之ハ正ニ $\mathfrak{M}$ ガ $\mathfrak{r}$-Ω-Modul m ノ拡大ニナッテ居ルコトヲ意味シ，假定ニ反スル. 故ニ $\mathfrak{M}$ ハ $\mathfrak{r}$-P-Modul トシテモ既約デナケレバナラナイ。

q.e.d.

Matrix トシテ書イタトキノ此ノ定理ノ意味ハ既ニ1ニ述ベタ通リデアル。拡大デナイト云フ條件ハ1節ノ(1)カラ(2)ノ表現ニ移ッタトキヤハリ既約デアルタメニ，定理1ニ述ベタ如ク十分デアルバカリデハナク，又必要デ

モアル。即チ擴大ニナツテ居レバ，1節ニ証明シタ様ニ(1)カラ (2)ニ移ルト表現ガ分解スル。即チ

$\boxed{\text{定理1}'}$ $\mathfrak{r}$-K-Modul $\mathfrak{M}$ ガ $\mathfrak{r}$-P-Modul トシテモ既約ナラ $\mathfrak{M}$ ハ $\mathfrak{r}$-Ω-Modul（$P \subset \Omega \subsetneqq K$）ノ拡大ニハナッテ居ナイ。

証明. $\mathfrak{M}$ ガ $\mathfrak{r}$-Ω-Modul $\mathfrak{m}$ ノ拡大ニナッテ井レバ，$\mathfrak{m} \subset \mathfrak{M}$ ト考ヘラレ，而モ $\mathfrak{M} = \mathfrak{m}\varkappa_1 + \cdots\cdots + \mathfrak{m}\varkappa_r$ 即チ $\mathfrak{M}$ ハ $\mathfrak{r}$-P-Modul トシテ既約デナイ。

q.e.d.

4. 今度ハ第一節ノ表現(2)カラ (1)ヲ求メル逆ノ問題ヲ考ヘル。ソノ方ガ吾々ノ主ナ目的デアル。始メニ少シ一般ナ形デ考ヘテ置ク。

Pハ1ヲ含ム可換環トスル。$\mathfrak{r}$-P-Modul $\mathfrak{M}$ ノ Endomorphismus α，即チ $\mathfrak{M}$ ノ $\mathfrak{M}$ 内ヘノ Operatorhomomorphismus

$$
\begin{aligned}
(u\rho_1 + v\rho_2)\alpha &= u\alpha\cdot\rho_1 + v\alpha\cdot\rho_2 \qquad u, v \in \mathfrak{M}\ \rho_i \in P \\
su\cdot\alpha &= s\cdot u\alpha \qquad\qquad s \in \mathfrak{r} \qquad (1)
\end{aligned}
$$

ハ Ring Δ ヲ作ル。$\mathfrak{M}$ ノ元ニ $\rho \in P$ ヲ掛ケル Operation ヲソノマヽ ρ トカケバ，Pガ可換ダカラ，(3)ニ於テ α ノ代リニ ρ ヲオイテモ成立ツ。

故ニ $P \subset \Delta$。即チΔハPヲ含ム Ring デアル。

次ニKハPヲ Zentrum 内ニ含ム（必ズシモ可換デナイ）Ring トシ，且ツPニ関シ一次独立ナ有限個ノ Basis ヲ持ッテ居ルトスル。即チKハPノ上ノ algebra

ダトスル。任意ノ γ-K-Modul $\mathfrak{M}'$ ハ γ-P-Modul トモ考ヘルコトモ出来ル。以上ノ假定ノ下ニ

$\boxed{\text{定理2}}$ γ-K-Modul $\mathfrak{M}'$ ガ γ-P-Modul $\mathfrak{M}$ ニ (γ-P-Modul トシテ) 同型ナラ，$\mathfrak{M}$ ノ Endomorphismenring Δ ハ K ト同型ナ Teilring $\overline{K}$ ヲ含ム. $\mathfrak{M}$ ハ γ-$\overline{K}$-Modul トモ考ヘラレ，γ-K-Modul $\mathfrak{M}'$ ト γ-$\overline{K}$-Modul $\mathfrak{M}$ トハ，K ト $\overline{K}$ ノ對應スル元ヲ同一視スレバ作用同型デアル。

証明. $\mathfrak{M}' \ni m' \longleftrightarrow m = \varphi(m') \in \mathfrak{M}$ ヲ與ヘラレタ (γ-P-) 作用同型トスル. $x \in K$ ハ $\mathfrak{M}'$ ノ元ニ對スル Operation トシテ (1) ノ α ト同ジ條件ヲ満足スル*). 即チ γ-P-Modul トシテノ $\mathfrak{M}'$ ノ Endomorphismus デアル。對應 φ ニヨッテ之レカラ γ-P-Modul $\mathfrak{M}$ ノ Endom. $\overline{x}$ ガ決ル. 即チ $m = \varphi(m')$ ニ對シ $m\,\overline{x} = \varphi(m'x)$ ト定義スレバヨイ. 明カニ $\overline{x}$ ハ $\mathfrak{M}$ ノ元ニ對シ式 (1) ノ α ト同ジ條件ヲ満ス. 即チ $\overline{x} \in \Delta$. $x \longrightarrow \overline{x}$ ハ isomorph ナ對應デ而モ $\rho \in P \subset K$ ニハ ρ 自身ガ對應スル: $\overline{\rho} = \rho$. ソレハ

$$\varphi(m'\rho) = \varphi(m')\rho$$

即チ φ ガ P-作用同型ダカラデアル。 $\therefore\ P \subset \overline{K} \subset \Delta.$

$\mathfrak{M}'$ ノ K-Basis $u'_1, \dots\dots, u'_g$ ニ φ デ對應スル $\mathfrak{M}$ ノ元 $u_1, \dots\dots, u_g$ ガ $\mathfrak{M}$ ノ $\overline{K}$-Basis ヲナス. $x \longleftrightarrow \overline{x}$ ナル對應ニヨッテ，K ト $\overline{K}$ ヲ同ジモノト見レバ $P \subset K \subset \Delta$ ト考ヘラレル. $\overline{x}$ ノ定義カラ明カナ様ニ $\mathfrak{M}'$

ト$\mathfrak{M}$トハγ-K-Modulトシテ作用同型デアル。

q. e. d.

結論． 従ッテ今後$\mathfrak{M}$ニ作用同型ナγ-K-Modulヲ考ヘルニハ$\mathfrak{M}$自身ダケデ考ヘレバ十分デアル。而モ$K \subset \Delta$トシテヨイ。

或ル意味デ定理2ノ逆ガ成立ツ。

$\boxed{\text{定理}2'}$ γ-P-Modul $\mathfrak{M}$ノEndomorphismenring Δノ部分環K($P \subset K \subset \Delta$)ニ関シ$\mathfrak{M}$ガ一次独立ナBasisヲ持テバ，$\mathfrak{M}$ハ$\gamma$-K-Modulトモ考ヘラレル．$\gamma$-K-Modulトシテノ$\mathfrak{M}$ノEndomorphismenringハ$\Delta$ノ元ノ中$K$トelementweiseニ可換ナモノノ全体($\Delta$内ニ於ケル$K$ノKommutator-algebra)デアル。特ニKガSchiefkörperナラBasisニ関スル條件ハ何時デモ成立ツ。

証明． $K \subset \Delta$ダカラ$K \ni x$ハ$su \cdot x = s \cdot ux$ヲ満足スル、ソノ上$\mathfrak{M}$ガK-Basisヲ持テバ，定義ニヨリ$\mathfrak{M}$ハγ-K-Modulデアル。

又αガγ-K-Modul $\mathfrak{M}$ノEndomorphismusナラ，猶更γ-P-Modulトシテノ$\mathfrak{M}$ノEndom.デアルカラ$\alpha \in \Delta$．シカモ$ux \cdot \alpha = u\alpha \cdot x$ダカラ$x\alpha = \alpha x$ガスベテノ$x \in K$ニ就テ成立ツ。

q. e. d.

5. Pハ今後常ニ可換体トスル．更ニγ-P-Modul

---

*) 前頁脚註：ココニ，PガKノZentrumニ含マレルコトガ用ヒラレル。

$\mathfrak{M}$ハ既約ダトスル。コノ時$\mathfrak{M}$ノ Endomorphismenring Δハ Schiefkörperデアル。(所謂 Schur ノ Lemma) $(\mathfrak{M}:P)=g$ トスレバ $P\subset\Delta\subset P_g$ デアルカラΔハPノ上ノ Divisionsalgebra デアル。$P\subset K\subset\Delta$ ナルKハマハリ Divisionsalgebra 従ッテ定理2′ノ假定ハ何時デモ満足サレテヰル。コノ場合ニ定理2ト2′ヲマトメテ云ヘバ:

$\boxed{\text{定理3}}$ $\mathfrak{M}$ハ既約ナ γ-P-Modul デアルトスル。KガPヲ Zentrum 内ニ含ム Ring ダトシテ，$\mathfrak{M}$ ガ γ-K-Modul トモ考ヘラレルナラ，Kハ $P\subset K\subset\Delta$ ナル多元体デアル。逆ニ $P\subset K\subset\Delta$ ナル任意ノKニ對シ$\mathfrak{M}$ハ γ-K-Modul ト考ヘラレ、勿論 γ-K-Modul トシテモ既約デアル。

Δハ$\mathfrak{M}$ヲ γ-K-Modul トシテ考ヘ得ル maximal ナKデアル。

結論。 KハP-Basisヲモツカラ，KノPニオケル正規表現ガアル。γ-K-Modul トシテノ$\mathfrak{M}$ガ vermitteln スルKノ行列ニヨル表現ニ於テ，Kノ元ヲ正規表現ノ行列デ置換ヘテ得ラレルPニ於ケル表現ガ，與ヘラレタ既約表現デアル。

$\mathfrak{M}=v_1\Delta+\cdots\cdots+v_r\Delta$，従ッテ $(\mathfrak{M}:\Delta)=r$ トスル。又Δノ Zentrum ヲZ，$(\Delta:Z)=j^2$ (jハΔノ Index)，$(Z:P)=m$ トスレバ，始メノ表現ノ次数 gハ

$$q = rj^2 m$$

5'. Δノ中デ違ッタKヲ取ッテ來テモ essential ニハ同ジ表現ガ出テ來テ了フコトガアル。

$\mathfrak{r}$-P-Modul ハ既約，Δ，Z ハ前節ノ意味トスル．Z ヲ含ムΔノ二ツノ Teilschiefkörper K_1，K_2 ノ間ニ Z ノ元ハソレ自身ニ對應サセル Isomorphismus $\varkappa_1 \longleftrightarrow \varkappa_2$ ガアッタトスル．良ク知ラレテ居ル様ニ此ノトキ $\varkappa_2 = \delta^{-1}\varkappa_1\delta$ ナル $\delta \in \Delta$ ガアル．$\mathfrak{r}$-K_1-Modul ト考ヘタ $\mathfrak{M}$ ト $\mathfrak{r}$-K_2-Modul ト考ヘタ $\overline{\mathfrak{M}}$ トハ，$m \longleftrightarrow \overline{m} = m\delta$ ナル對應デ作用同型デアル；但シ Operator ノ方モ $S \longleftrightarrow S$，$\varkappa_1 \longleftrightarrow \varkappa_2$ デ對應サセルノデアル。實際

$$\overline{Sm} = Sm\cdot\delta = S\cdot m\delta = S\overline{m}$$

$$\overline{m\varkappa_1} = m\varkappa_1\cdot\delta = m\delta\cdot\varkappa_2 = \overline{m}\cdot\varkappa_2$$

∴ K_1 ト K_2 ノ對應スル元ヲ區別シナケレバ，$\mathfrak{r}$-K_1-Modul $\mathfrak{M}$ ト $\mathfrak{r}$-K_2-Modul $\overline{\mathfrak{M}}$ トハ同値ナ表現ヲ vermitteln スル。

6. Lemma. K ハ可換体トスルトキ既約ナ $\mathfrak{r}$-K-Modul $\mathfrak{M}$ ガ絶対既約ナ必要十分條件ハ $\mathfrak{M}$ ノ Endomorphismenring ガ基礎体 K 自身デアルコトデアル。

證明. 條件ハ，與ヘラレタ Matrix ノ System 全体ト可換ナ Matrix ガ $\varkappa E$ ノ形ニナルコトデアッテ，ソレガ必要條件デアルコトハ Schur ノ Lemma ノ系トシテ

良ク知ラレテ居ル。十分ノ方ハ例ヘバ Weyl: Classical group P. 92 Theorem (3.4.C). γ ノ元ガ $\mathfrak{M}$ ニ惹起スル一次変換ノ集合ノ enveloping algebra ヲ $[\gamma]$ トスレバ，$[\gamma]$ ハ既約ナ Matric algebra. $(\mathfrak{M}:K)=g$ トスルト，K_g ニオケル $[\gamma]$ ノ commutator ノ commutator ハ $[\gamma]$ 自身デアル。*) 所ガ $[\gamma]$ ノ commutator ガ K 自身ダト云フ假定デアルカラ $[\gamma]=K_g$. 故ニ $[\gamma]$ シタガッテ γ ガ絶對既約デアル。 q. e. d.

7. $\boxed{\text{定理4}}$ P: 可換体. 既約ナ γ-P-Modul $\mathfrak{M}$ ガ絶對既約ナ γ-K-Modul (K: 可換) ト考ヘ得ルナラ，K ハ $\mathfrak{M}$ ノ Endomorphismenring Δ ノ一ツノ Maximal ナ可換部分デアル。逆ニ此様ナ K ヲトレバ，$\mathfrak{M}$ ハ γ-K-Modul トシテ絶對既約デアル。K ハ一般ニ一意的ニハ決ラナイガ

$$(K:P)=jm$$

ハ一定デアル。

---

*) 通常ノ algebren ノ理論ノ知識ヲ多少共必要トスルノハ，本談話中此処ダケデアル。併シ commutator ノ commutator ガ元ヘ戻ルコトノ一般論ハ不必要ナノデアッテ，K_g ノ既約ナ Teilalgebra $\mathfrak{A}$ ニツイテダケ云ヘレバヨイ。ソレニハ Weyl ノ本ニアルノガ一番近道デアラウ。$\mathfrak{A}$ ノ正規表現ガ $\mathfrak{A}$ ヲ幾ツカ並ベタ形ニナル事(云ヘ換ヘレバ $\mathfrak{A}$ ガ minimal ナ左 Ideal ノ直和ニナルコト) ダケハドウシテモ要ル。此 Lemma ノモット elementary ナ証明ハ出来ナイモノデアラウカ。

証明：　$\mathfrak{M}$ が γ-K-Modul ナラ當然既約デ，而モ定理2ニヨリ $K \subset \Delta$ ト考ヘラレル．γ-K-Modul $\mathfrak{M}$ ノ Endomorphismenring ハ定理2′ニ述ベタ様ニ，K ノ Δ ニオケル Kommutatoralgebra K^* デアル．K ガ可換ダカラ $K \subset K^*$．扨テ $\mathfrak{M}$ ガ γ-K-Modul トシテ絶對既約ナタメニハ Lemma ニヨリ $K = K^*$ ガ必要十分．ソレニハ K ガ maximal ナ可換部分体デアルコトガ必要十分デアル．（實際 $K \subsetneqq K'$ ナル可換体ガアレバ，$K' \subset K^*$ ダカラ $K \neq K^*$，逆ニ $K \neq K^*$ ナラ $K^* - K \ni x^*$ ヲトルト，$K(x^*)$ ハ K ヲ echt ニ含ム可換体）

q. e. d.

$\boxed{\text{系}}$ 特ニ Δ ガ可換ナラバ，$K = \Delta$．即チ P ニ於ケル既約表現ヲ $P \subset K$ ニオケル絶對既約表現ト考ヘル考ヘ方ハ一意的ニキマル。

8．例．　P＝實數体トスル．コノトキ $\Delta = P$ 又ハ $P(i)$ 又ハ四元數体 Q デアル．始メノ二ツノ場合ハ可換ダカラ前節系ニヨリ，定理4ノ絶対既約表現ハ一意的ニ決ル．$\Delta = Q$ デモ，ソノ最大可換部分体ハ何レモ $P(i)$ ニ同型ダカラ，5′ニヨリ，ヤハリ一意性ガ成立ツ．即チ

(A)　「實數体ニオケル既約表現ニ對シテハ定理4ニ云ッタ絶対既約表現ハ一意的ニ決ル.」

實數体ニ於ケル既約表現ハ一般論ニヨリ次ノ手續デ得ラレル：先ヅ複素數体ニ於ケル表現ガ全部分ッタトスル．ソノ

一ツヲ取リ，適當ナ行列デ transform シテ，總テノ行列ノ元ガ實數ニナレバ，ソレデ實數体ニ於ケル（絶対）既約表現ガ出来ル．モシドウ transform シテモ real ニナラナケレバ，行列ノ各々ノ複素數 $\alpha = a + bi$ ヲ $\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$ ナル matrix デ置換ヘルト實數体ニオケル（絶對デナイ）既約表現ガデキル。ソノ際二ツノ同値デナイ複素表現カラ出發シテ同ジ實表現ガ出来ルヤウナコトガナイト保証スルノガ(A)デアル。

i) $\Delta = P$, $K = P$ 始メカラ絶對既約

ii) $\Delta = P(i)$, $K = P(i)$ Kデ，同値デナイ二ツノ表現ニ分レル。

iii) $\Delta = Q$, $K = P(i)$ Kデ，同値ナ二ツノ表現ニ分レル。

9. 定理4ヲ，Lie algebra 等ヲ含ム一般ノ algebra ニ應用スル．

〔定義〕 Pハ可換体，$\mathfrak{M}$ハ有限階ノ P-Modul

$$\mathfrak{M} = u_1 P + \cdots\cdots + u_g P$$

デアッテ，$\mathfrak{M}$ノ任意ノ二ツノ元ニ乘法ガ定義サレ，其ノ乘法ハ

$$\begin{aligned} u(v_1\rho_1 + v_2\rho_2) &= uv_1\cdot\rho_1 + uv_2\cdot\rho_2 \qquad u, v_1, v_2 \in \mathfrak{M} \\ (v_1\rho_1 + v_2\rho_2)u &= v_1u\cdot\rho_1 + v_2u\cdot\rho_2 \qquad \rho_1, \rho_2 \in P. \end{aligned} \tag{1}$$

ヲ満足スルトスル．コノ時$\mathfrak{M}$ヲPノ上ノ（lineare）algebra 又ハ簡單ニ P-algebra ト云フ．$u_i u_j = \sum u_k \gamma_{ij}^k$

ヲ全然勝手ニ與ヘレバ，(1) カラ $\mathfrak{M}$ ノ任意ノ二ツノ元ノ積ガ決リ，$\mathfrak{M}$ ハ lineare algebra ニナル。

$\mathfrak{M}$ ノ P-Teilmodul $\mathfrak{a}$ ガ $\mathfrak{M}\mathfrak{a} \subset \mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}\mathfrak{M} \subset \mathfrak{a}$ ヲ満足スルトキ，$\mathfrak{a}$ ヲ $\mathfrak{M}$ ノ (P-)*Ideal* ト云フ。(0), $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}\mathfrak{M}$ ハ必ズ Ideal デアル。P-Algebra $\mathfrak{M}$ ガ (0) ト $\mathfrak{M}$ 以外ニ P-Ideal ヲ含マナイトキ $\mathfrak{M}$ ハ (P-)*einfach* デアルトイフ。

$\mathfrak{M}$ ガ一階 $\mathfrak{M} = u_1 P$ デ $u_1 u_1 = 0$ トシテモ，コノ定義デハ $\mathfrak{M}$ ハ einfach デアルガ，之レヲ除クタメニ，einfach ノ定義ノ中ニ條件 $\mathfrak{M}\mathfrak{M} \neq 0$ ヲ附加ヘルコトニスル。サウスレバ自然ニ $\mathfrak{M}\mathfrak{M} = \mathfrak{M}$ トナル。

K ヲ P ノ拡大体トスルトキ，$\mathfrak{M}_K = u_1 K + \cdots\cdots + u_r K$ ガ普通ノ通 K-Algebra トシテ定義サレル。K ヲドウトッテモ $\mathfrak{M}_K$ ガ einfach ナトキ，$\mathfrak{M}$ ハ *normal einfach* デアルト云フ。

$(u)v = uv$, $(u)'v = vu$ ト書キ，(u) ノ全体ヲ $(\mathfrak{M})$, $(u)'$ ノ全体ヲ $(\mathfrak{M})'$ $\gamma = (\mathfrak{M}) + (\mathfrak{M})'$ トスレバ，$\mathfrak{M}$ ハ (1) ニ依ッテ γ-P-Modul デアル。$\mathfrak{M}$ ノ P-Ideal ハ γ-P-Teilmodul ニ他ナラナイ。∴ $\mathfrak{M}$ ガ P-einfach トハ $\mathfrak{M}$ ガ γ-P-Modul トシテ既約ナコトデアル。又 $\mathfrak{M}_K$ ハ γ-K-Modul ト考ヘラレル。$\mathfrak{M}_K$ ガ K-einfach ナ事ト，γ-K-Modul トシテ既約ナコトト同ジデアル。故ニ $\mathfrak{M}$ ガ normal einfach ナコトト，$\mathfrak{M}$ ガ γ-P-Modul トシテ絶對既約ナコトト同ジデ

アル。

10. *Lemma.* KヲPノ有限次拡大，$\mathfrak{M}$ヲKノ上ノalgebraトスル．$\mathfrak{M}$ハγ-K-Modulトシテγ-Ω-Modul $\mathfrak{m}$ ($P \subset \Omega \subsetneqq K$) ノErweiterungsmodul $\mathfrak{m}_K$デハナイ。

証明．若シ斯様ナ$\mathfrak{m}$ガアレバ$\mathfrak{m} \subset \mathfrak{M}$ト考ヘテイヽ．$\mathfrak{m} \neq \mathfrak{M}$デ$\mathfrak{m}K = \mathfrak{M}$．$\mathfrak{m}$ハ$\gamma$-Modulダカラ$(\mathfrak{M})\mathfrak{m} \subset \mathfrak{m}$，即チ$\mathfrak{M}\mathfrak{m} \subset \mathfrak{m}$．然シ$\mathfrak{M}\mathfrak{m} = \mathfrak{M}K \cdot \mathfrak{m} = \mathfrak{M} \cdot \mathfrak{m}K = \mathfrak{M}\mathfrak{M} = \mathfrak{M}$，之ハ矛盾． q.e.d.

定理1ノ條件ハ自然ニ満足サレル．

$\boxed{\text{定理5}}$ KガPノ有限次拡大ナルトキ，einfachナK-algebra $\mathfrak{M}$ハP-algebraトシテモeinfachデアル。*)

例．複素数ノ二次元ノunimodular groupハ三ツノ複素parameterヲモツ単純群デアル．之レヲ六ツノ実parameterノ群ト考ヘナホスト，Lorentz変換群トlocalニ同型ニナル．∴ Lorentz群ハ単純デアル．シカシnormal einfachデハナイ。(全部localナ話デアル)

---

*) assoziativノ時ノ様ニ$\mathfrak{M}$ニ単位元ガアレバ，Idealハ自然ニK-IdealニナルカラK-IdealトカP-Idealトカ區別スル必要ハナク，定理ノ内容ハtrivialデアル．Lie環ノ時ハソレ程trivialデナイ。

11. Lemma. $\mathfrak{M}$ ヲ einfach + P-Algebra トスル. $\mathfrak{M}$ ノ γ-P-Modul トシテノ Endomorphismenring Δ ハ可換デアル。

証明. $\alpha\in\Delta$ ハ γ-Modul $\mathfrak{M}$ ノ Endomorphismus ダカラ $(u)v\cdot\alpha=(u)\cdot v\alpha$, $(v)'u\cdot\alpha=(v)'\cdot u\alpha$. 即チ $uv\cdot\alpha=u\alpha\cdot v=u\cdot v\alpha$. α ヲ積ニ operate スルニハ, ドノ因数ニ operate シテモヨイ. $\alpha,\beta\in\Delta$ ナラ

$$(uv)\cdot\alpha\beta=(u\alpha\cdot v)\beta=u\alpha\cdot v\beta=(u\cdot v\beta)\alpha=(uv)\beta\alpha$$

$$(uv)(\alpha\beta-\beta\alpha)=0 \qquad \mathfrak{M}\mathfrak{M}(\alpha\beta-\beta\alpha)=0$$

$\mathfrak{M}\mathfrak{M}=\mathfrak{M}$ ダカラ之レヨリ $\alpha\beta-\beta\alpha=0$.

q.e.d.

(注意) $\mathfrak{M}$ ハ einfach デナクテモ, $\mathfrak{M}\mathfrak{M}=\mathfrak{M}$ デサヘアレバヨイ. Lie環ノトキコノ性質ハ "vollkommen" ト名付ケラレテヰル。

上ノ Lemma ノ故ニ定理4ノ系ノ假定ガ成立チ:

$\boxed{\text{定理6}}$ einfach + P-algebra $\mathfrak{M}$ ハ, γ-P-modul ($\gamma((\mathfrak{M})+(\mathfrak{M})')$) トシテノ $\mathfrak{M}$ ノ Endomorphismenkörper Δ ノ上ノ normal-einfach + Algebra ト考ヘル事ガ出来ル、逆ニ $\mathfrak{M}$ ガ normal-einfach + K-algebra ト考ヘラレバ, $K=\Delta$ デアル. 又 Δ ハ, $\mathfrak{M}$ ヲ K-algebra ト考ヘ得ル最大ノ K デアル. (此ノ最後ノ意味デ, Landherr ハ Δ ヲ $\mathfrak{M}$ ノ Zentrum ト名付ケタ.)

12. 定理6ノ証明ハ既ニ Cartan: Les groupes réels simples, finis et continus, [Ann. École norm. (3) 31 (1914)] ニアル. 即チ實係數ノ單純 Lie 環ハ normal-einfach デアルカ, 若シクハ複素係數ノ單純 Lie 環ヲソノママ parameter ノ數ガ二倍ノ實 Lie 環ト考ヘタモノデアル. Landherr ハ Über einfache Liesche Ringe (Hamburg 11) ノ冒頭デ, 定理6ガ標數0ノ体ノ時ニハ一般ニ成立チ, 而モ $\mathfrak{M}_\Omega$ ガ常ニ完全可約トイフ條件ガアレバ, Lie 環デナクテモ成立ツコトヲ示シタ。

彼ノ証明ヲヨク見レバ, 基礎体ガ vollkommen ト云フ事以外無條件デヨイコトガ分ル。更ニ Jacobson ハ A note on non-associative algebras (Duke 3) ニ基礎体ノ制限ナシニ此ノ定理ヲ述べテ居ル. Jacobson ハ $\mathfrak{T} = (\mathfrak{M}) + (\mathfrak{M})'$ ナル行列系ノ enveloping P-algebra $[\mathfrak{T}]$ ヲ考ヘル。$\mathfrak{M}$ ガ einfach ナタメニハ associative algebra $[\mathfrak{T}]$ ガ einfach ナコトガ必要且ツ十分デアル。

又 normal-einfach ナタメニハ $[\mathfrak{T}]$ ガ P_g トナルコトガ必要且ツ十分デアル、之レカラ $\mathfrak{M}$ ガ einfach ナラバ, $[\mathfrak{T}]$ ノ Zentrum ヲ K トスレバ, $\mathfrak{M}$ ハ K-algebra ト考ヘラレ, 且 normal-einfach デアルト書イテアル. 然シ 11 ノ Lemma カラ分ルヤウニ $\mathfrak{M}$ ガ單純ナトキ $[\mathfrak{T}]$ ハ單ニ單純ナノミデナク, アル可換体 (即チ

[γ]ノZentrum K）ノ上ノMatrizenringデアル。ソレヲ云ハズニ定理6ノ結論ガ出テ居ルノハ少シ妙ダト思フ。

本談話デハ[γ]ノ代リニ専ラソノKommutatoralgebra，即チEndomorphismenring Δヲ考ヘタ。（唯第6節ノLemmaノ証明ニハ[γ]ヲ持チ出サナケレバナラナクナッテ，甚ダ不徹底ナコトニナッテ了ッタガ）。既約ナSystemヲ問題ニシテヰル限リ，Δヲ考ヘル方ガ便利ナ様デアル。

モット一般ナバアヒニハ，[γ]ハ必ズシモΔノKommutatorトシテ，Δカラ逆ニcharacterize出来ナイ。カラ，[γ]自身ヲ考ヘル方ガ一般的デアラウ。

表現ノ場合ノ定理4ハE. Bannow: Die Automorphismengruppe der Cayley-Zahlen (Hamburg 13) ノ250頁ノ下ノ方ニ書イテアル。其処ニ「Kハ(bis auf Isomorphie)一意的ニ定マル」ト書イテアルノハ，algebraノ場合カラノ類推デウッカリ書イテ了ッタノデアロウガ，明カニ誤リデアル。